حسابان آسان شد

مقدمه‌ای بسیار ساده بر آن روش‌های زیبای محاسبه که عموماً با نام‌های ترسناک حساب دیفرانسیل و حساب انتگرال شناخته می‌شوند.

تألیف:سیلوانوس پی. تامپسون

Silvanus P. Thompson

مترجم : سید حسین تَفّاخ

سرشناسه: فیلیپس تامپسون، سیلوانوس، ۱۸۵۱ —

Thompson, Silvanus Phillips

حساباِن آسان شد.../ تالیف سیلوانوس پی. تامپسون؛ مترجم سیدحسین تفاخ. - تهران: سیدحسین تفاخ؟؟،۱۴۰۴.

عنوان و نام پدیدآور: حسابان آسان شد / سیلوانوس پی. تامپسون

مترجم: سید حسین تفاخ

ناشر: سید حسین تفاخ

شابک: ۹۷۸-۶۲۲-۰۰-۲۸۲۱-۵

978-622-00-2821-5

فهرست نویسی بر اساس اطلاعات فیپا :

عنوان اصلی : Calculus made easy.2nd ed

موضوع : حسابان

۳۰۳QA ۵۱۵

کتابخانه ملی ایران ۱۰۲۸۷۲۴۵

عنوان انگلیسی: Calculus Made Easy

ایمیل: Hossein.tafakh@gmail.com

قطع و صفحه: وزیری - ۲۹۸

نوبت چاپ: اول (پاییز ۱۴۰۴)

تیراژ: ۲۲۰۰ نسخه

چاپخانه:

قیمت: ۸۷,۰۰۰,۰۰۰ ریال

هر چه را یک نادان بتواند انجام دهد، دیگری هم میتواند انجام دهد.
(ضرب المثل باستانی سیمین)

با افتخار این اثر را تقدیم می‌کنم به ساحت نورانی پیامبر اعظم اسلام (ص)، ختم‌کننده رسالت الهی، که چراغ هدایت را برای بشریت فروزان ساخت، و به اهل بیت مطهرشان، که کشتی نجات در اقیانوس متلاطم زندگی‌اند.

تقدیر و تشکر قلبی خود را تقدیم می‌کنم به خانواده عزیزم، به خصوص پدر و مادر بزرگوارم، که با حمایت های بی دریغ، دعاهای خالصانه و مهر بی مانندشان، مسیری روشن برایم گشودند. وجود پربرکت و تشویق‌های دائمی آن‌ها بزرگترین سرمایه و انگیزه‌ام در تمام لحظات زندگی و به‌ویژه در این مسیر بود. این اثر، ارمغانی کوچک در برابر دریای بی‌کران محبت شماست.

مقدمه ویرایش دوم

موفقیت شگفت‌انگیز این اثر، نویسنده را بر آن داشته تا تعداد قابل‌توجهی از مثال‌ها و تمرین‌های حل‌شده را به آن اضافه کند. همچنین از فرصت استفاده شده تا بخش‌هایی که تجربه نشان داده است توضیحات بیشتری در آن‌ها مفید خواهد بود، گسترش یابد.

نویسنده با قدردانی، دریافت پیشنهادات و نامه‌های ارزشمند بسیاری از معلمان، دانش‌آموزان و منتقدان را ارج می‌نهد.

اکتبر ۱۹۱۴

فهرست مطالب

فصل اول

جهت نجات شما از وحشت اولیه

وحشت اولیه ، که گریبان گیر بسیاری از نوجوانان برای شروع یادگیری محاسبات است، میتواند به راحتی نابود شود اگر بتوان دو سمبل پایه را به زبان عامه – زبانی که برای همه قابل فهم باشد – ترجمه کرد و توضیح داد .

این دو علامت دهشتناک عبارت هستند از :

(۱) d که فقط معنی " مقدار کوچکی از " را میدهد .

پس نتیجه میگیریم که dx معنی کمی از x را میدهد ، یا du معنی کمی از u را میدهد، ریاضی دانان معمولی فکر میکنند که بهتر است از لفظ " یک عنصر از " استفاده شود بجای " کمی از " . ولی هر کدام را که شما علاقه دارید می توانید صدا کنید. در ادامه متوجه خواهید شد که این عناصر یا " کمی ها " بی‌نهایت کوچک هستند .

(۲) $\int$ که فقط یک s (اس انگلیسی) کشیده شده است ، صدا می‌شود "مجموع ".

پس نتیجه میگیریم $\int dx$ معنی حاصل جمع تمام مقادیر کوچک x را میدهد ، یا $\int dt$ معنی حاصل جمع تمام مقادیر کوچک t را میدهد . ریاضی دانان معمولی این سمبل را " انتگرال"

صدا میکنند . حالا به راحتی می توان دید که اگر در نظر بگیریم که x از تعداد زیادی از مقادیر کوچکتر تشکیل شده باشد ، و نام هرکدام از مقادیر کوچک dx باشد و اگر تمام آن ها را جمع کنید نتیجه می شود تمام مقادیر dx (یا میتوان گفت تمام مقدار x) .

به زبان ساده کلمه "انتگرال" معنی "کل" را می‌دهد. به مدت زمانی که یک ساعت طول می کشد فکر بکنید ، میتوان این مقدار را به ۳۶۰۰ ثانیه بیان کرد . اگر کل ۳۶۰۰ ثانیه را با هم جمع بکنیم می- شود یک ساعت .

از این به بعد شما میدانید که وقتی یک عبارت با چنین نشان ترسناکی شروع میشود هدف این است که به شما بگوید که عملگر مقابل معنی جمع کردن تمام مقادیر جلوی آن سمبل را میدهد ، به زبان ساده تر هر چیز که در مقابل آن سمبل هست را با هم جمع کنید .

به همین سادگی .

فصل دوم

پیرامون درجات مختلف کوچکی

در فرایند محاسبات خود در خواهیم یافت که با مقادیر کوچک با درجه های مختلف کوچکی برخورد خواهیم کرد.

همچنین باید یاد بگیریم که در چه شرایطی مقادیر بسیار کوچک خواهند شد که بتوان از آنها چشم پوشی کرد . همه چیز به کوچک بودن آن مقدار بستگی دارد .

قبل از هرگونه قانون گذاری درباره بعضی موارد آشنا بحث خواهیم کرد .۶۰ دقیقه در یک ساعت، ۲۴ ساعت در یک روز و ۷ روز در یک هفته وجود دارد. بنابراین، ۱۴۴۰ دقیقه در یک روز و ۱۰۰۸۰ دقیقه در یک هفته .

مقدار دقیقه در قبال یک هفته مقدار بسیار ناچیزی به چشم می آید . نیاکان ما مقدار یک دقیقه در برابر یک ساعت را بسیار ناچیز میشمردند ، به همین دلیل کلمه "یک دقیقه[1] " را برای

[1]متن مترجم: ریشه کلمه انگلیسی دقیقه یا همان minute از کلمه لاتین Minutus به معنی کوچک گرفته شده.

آن انتخاب کردند به معنی یک شصتُم ساعت. وقتی به مقدار کمتر از یک دقیقه نیاز پیدا شد تصمیم گرفتند که هر دقیقه را به شصت قسمت کوچکتر تقسیم کنند ، که در زمان ملکه الیزابت نام " second min`ute" یا " دقیقه دوم[۲] " را برای آن انتخاب کردند (یعنی مرتبه دوم دقیقه) . امروزه این مقادیر کوچک با مرتبه دوم کوچکی را «ثانیه» مینامیم . اما افراد کمی دلیل انتخاب این اسم ها را میدانند .

حال سوال پیش می آید ، اگر یک دقیقه نسبت به یک روز بسیار کوچک به نظر می آید، یک ثانیه چقدر کوچکتر به نظر خواهد آمد ؟

برای مقایسه باید مقدار کوچک تر را نسبت به بزرگتر بررسی کرد . برای مثال مقایسه یک ریال و صد تومان ، هر یک ریال $\frac{۱}{۱۰۰۰}$ صد تومان است . یک ریال ارزش بسیار کمتری نسبت به یک صد تومانی دارد : قطعاً می‌توان آن را به عنوان یک مقدار "کوچک" در نظر گرفت ، یک ریال مقدار بسیار کوچکتری در یک میلیون تومان خواهد داشت و مقدار یک میلیون تومان مقدار بسیار کمتری نسبت به ثروت یک میلیاردر خواهد داشت .

حال اگر بخش عددی را به عنوان اساس تناسب در نظر بگیریم و هر تقسیم را بسته به نیازمان میتوانیم مقدار کوچک در نظر بگیریم ، به این روش ما میتوانیم مرتبه های بیشتر از کوچک بودن را در نظر بگیریم . پس برای مثال زمان، اگر $\frac{۱}{۶۰}$ کسر کوچکی در نظر گرفته بشود ، پس $\frac{۱}{۶۰}$ از $\frac{۱}{۶۰}$ (کسر کوچکی از کسر کوچک) میتواند مقدار کوچکی از مرتبه دوم کوچک بودن در نظر گرفته شود .

یا اگر ، به هر دلیلی ما یک درصد را در نظر بگیریم (یعنی $\frac{۱}{۱۰۰}$) به عنوان کسر کوچک ، پس یک درصد از یک درصد (یعنی $\frac{۱}{۱۰,۰۰۰}$) کسر کوچکی خواهد بود از مرتبه دوم کوچک

---

[۲] متن مترجم : این نظم در زبان فارسی و عربی هم قابل مشاهده است چرا که ثانیه کلمه عربی است و معنی "دومی" را میدهد.

بودن . به همین روش $\frac{۱}{۱,۰۰۰,۰۰۰}$ کسر کوچکی خواهد بود از مرتبه سوم کوچک بودن ، یعنی یک درصد از یک درصد از یک درصد .

برای مثال یک کرنومتر دقیق را در نظر بگیرید ، حد دقت این کرنومتر میتواند یک دقیقه در سال باشد، باید دقتی برابر ۱ در ۱,۰۵۱,۲۰۰ داشته باشد ، پس مقدار " کوچک " را میتوان $\frac{۱}{۱,۰۰۰,۰۰۰}$ (یا یک میلیونیم) در نظر گرفت ، حال $\frac{۱}{۱,۰۰۰,۰۰۰}$ از $\frac{۱}{۱,۰۰۰,۰۰۰}$ که معادل $\frac{۱}{۱,۰۰۰,۰۰۰,۰۰۰,۰۰۰}$ (یک تریلیون) میتواند مقدار کوچکی از درجه دوم "کوچک" بودن باشد و میتوان از آن چشم پوشی کرد .

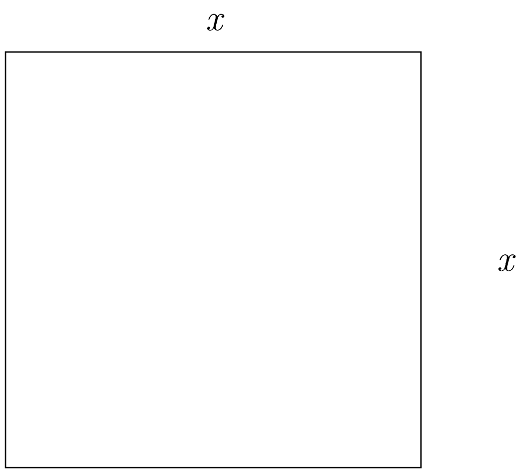
پس دیدیم که هر چقدر مقدار اولیه کوچک باشد . مقادیر درجه های بالاتر هم ناچیز و کوچکتر میشوند پس نتیجه میگیریم که " هر وقت مقدار کوچک اولیه آنقدر کم در نظر گرفته شود که بتوان از آن چشم پوشی کرد درجه های بالاتر مقدار کوچک را هم میتوان نادیده گرفت و از آنها چشم پوشی کرد ".

اما باید یادآور شد که چنانکه این مقادیر کوچک در معادله ها ظاهر بشوند به عنوان ضربی در مقداری دیگر میتوانند مقدار معادله را تغییر بدهند ، یک ریال به سرعت زیاد میشود وقتی چند بار ضرب در ۱۰۰ بشود .

در حسابان مینویسیم dx به معنی مقدار کوچکی از x . این نوشته ها که به شکل dx ، و dy ، و du هستند با نام " دیفرانسیل" صدا میشوند ، دیفرانسیل x یا y یا u (خوانده میشوند دی ایکس ، یا دی وای ، یا دی یو) . اگر dx مقدار کوچکی از x باشد پس میتوان از مقدار dx به دلیل کوچک بودنش چشم پوشی کرد اما در مواردی مثل $x.dx$ یا $x^۲dx$ ، یا $a^x dx$ نمیتواند به دلیل کوچک بودن dx از آن چشم پوشی کرد ، اما $dx \times dx$ مقدار ناچیزی خواهد بود و میتوان آن را در نظر نگرفت .

به این مثال توجه کنید .

حال به مقداری مثل x فکر بکنید که میتواند اندکی رشد بکند، پس میتوان گفت $x + dx$ بطوری که dx مقدار اندکی است که حاصل رشد است . مربع جمله (یعنی جمله ضرب در خودش) برابر خواهد بود با $x^۲ + ۲x.\, dx + (dx)^۲$ قسمت دوم جمله ، مقدار ناچیزی نیست و نمیتوان آن را نادیده گرفت چرا که یک ضرب در مرتبه اول است اما قسمت سوم مرتبه دوم مقدار اندک رشد است و میتوان از آن چشم پوشی کرد ، مقدار کوچکی از مقدار کوچک $x^۲$. حال اگر dx را به صورت عددی در نظر بگیریم ، برای مثال مقدار $\frac{۱}{۶۰}$ از x ، سپس مولفه دوم برابر خواهد بود با $\frac{۲}{۶۰}$ از $x^۲$ ، در حالی که مولفه سوم برابر خواهد بود با $\frac{۱}{۳۶۰۰}$ از $x^۲$. این مولفه بسیار مقدار کمتری نسبت به مولفه دوم خواهد بود، اگر از این جلوتر برویم و مقدار dx را برابر با $\frac{۱}{۱۰۰۰}$ از x در نظر بگیریم ، مولفه دوم برابر خواهد بود $\frac{۲}{۱۰۰۰}$ از $x^۲$ ، در حالی که مولفه سوم برابر خواهد بود با $\frac{۱}{۱,۰۰۰,۰۰۰}$ از $x^۲$.

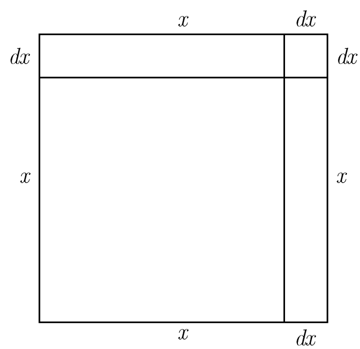


شکل ۱

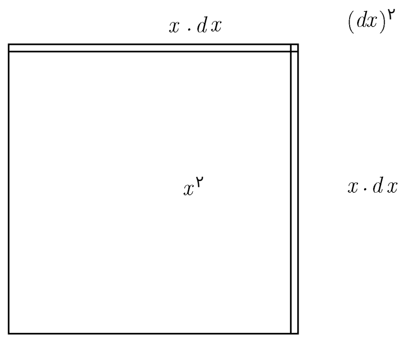
از دیدگاه هندسی، این موضوع را می‌توان به شکل زیر ترسیم نمود:

یک مربع ترسیم کنید (شکل ۱) ضلع را x در نظر می‌گیریم . حال برای رشد هر ضلع، به مقدار dx به هر کدام از ضلع ها اضافه می‌شود. مربع رشد کرده از مربع اولیه $x^۲$ ساخته

شده است ، دو مربع ایجاد شده در بالا و کنار مربع دارای مساحتی برابر با $x.\,dx$ (یا مجموع دو مربع که میشود $2x.\,dx$) هستند ، و یک مربع کوچک در بالا سمت راست است و برابر میشود با $(dx)^2$. در شکل ۲ ما dx را مقدار بزرگی در نظر گرفته ایم ، چیزی در حدود $\frac{1}{5}$ از x . اما متصور شوید که dx را $\frac{1}{100}$ قطر خط کشیده شده توسط یک خودکار بسیار دقیق و ظریف در نظر بگیریم ، این گونه مربع در گوشه برابر خواهد بود با $\frac{1}{10,000}$ از x^2 و عملاً این مربع غیر قابل دید خواهد بود . به وضوح مقدار $(dx)^2$ تنها وقتی قابل چشم پوشی است که مقدار dx از اول کوچک در نظر گرفته شود .



شکل ۲



شکل ۳

بگذارید یک تشبیه را در نظر بگیریم.

فرض کنید یک فرد پولدار به منشی خود بگوید: هفته آینده من کسری کوچک از درآمدم را به تو خواهم داد و منشی به پسرش بگوید : من کسری کوچک از آنچه به دست می‌آورم را به

تو خواهم داد. فرض کنید این کسر در هر دو مورد، $\frac{۱}{۱۰۰}$ باشد. حال اگر فرد میلیونر درآمدی معادل ۱۰ میلیون تومان داشته باشد ، مقدار ۱۰۰ هزار تومان نصیب منشی میشود و از این مقدار ۱ هزار تومان به پسر منشی خواهد رسید . عدد ۱۰۰ هزار تومان نسبت به ۱۰ میلیون عدد کمی است اما مقدار هزار تومان در برابر ۱۰ میلیون تومان بسیار بسیار ناچیز و خرد است ، اما چه میشد اگر نسبت را کوچکتر در نظر می‌گرفتیم ؟ یعنی چیزی مثل $\frac{۱}{۱۰۰۰}$ در این حالت منشی ۱۰ هزار تومان از پول ۱۰ میلیون تومان میلیونر دریافت می‌کرد و پسر منشی ۱۰ تومان دریافت می‌کرد .

دین سوئیفت[۳] نوشت:

"همانطور که زیست‌شناسان مشاهده می‌کنند، یک کک"
"کک‌های کوچکتری دارد که از آن تغذیه می‌کنند"
"و اینها کک‌های کوچکتری دارند که آنها را می‌گزند"
"و این روند تا بی‌نهایت ادامه دارد"

یک گاو ممکن است نگران یک کک با اندازه معمولی باشد موجودی کوچک از مرتبه اول کوچکی. اما احتمالاً خود را درگیر ککِ کک نخواهد کرد؛ از آنجا که کوچکی آن از مرتبه دوم است و ناچیز خواهد بود. حتی یک دسته بزرگ از ککِ کک‌ها نیز برای گاو اهمیت چندانی نخواهد داشت.

---

[۳] Dean Swift